

SRP (fysik+matematik) - Radiopulsarer

Radiopulsarer og rotationsudviklingen af neutronstjerner

I dette SRP oplæg kan du få inspiration til et astrofysikprojekt med fokus på radiopulsarer og deres udvikling. Du får her en kort gennemgang af relevant baggrundsviden, teori, og supplerende litteratur. På AAU's SRP dage kan du (1) høre et foredrag om teorien på gymnasieniveau, og (2) få inspiration og vejledning til teoretiske beregninger på din egen computer, og (3) få adgang til observationsdata til sammenligning med dine beregninger.

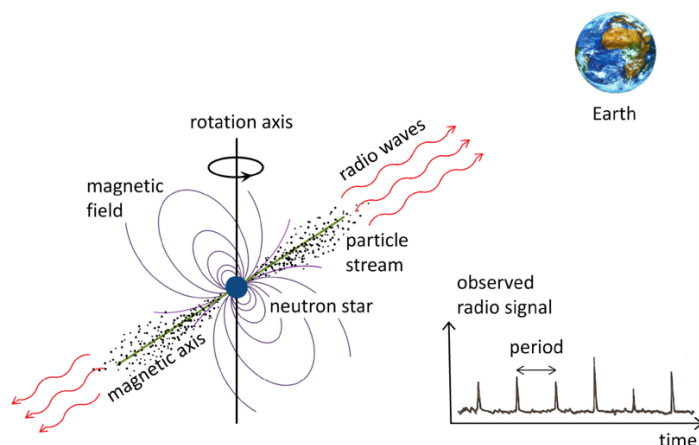
Forudsætning

Dette SRP projekt kræver installation af et programmeringssprog (fx Python) samt et program til at plotte de beregnede sammenhænge (grafer). AAU kan ikke hjælpe med denne del og det forudsættes at eleven har et minimum af erfaring med programmering for at kunne løse og plotte de relevante ligninger for at udregne rotationsudviklingen af radiopulsarer.

Teori

(kort resumé — uddybende teori på engelsk findes i udleveret litteratur på engelsk)

Hurtigt roterende neutronstjerner med stærke magnetfelter udsender radiobølger. Idet deres magnetfeltakse, tilnærmelsesvis beskrevet som en magnetisk dipol, har en hældning med vinklen, α i forhold til pulsarens rotationsakse, observeres de som et periodisk radiosignal hernede på Jorden (et signal for hver omgang neutronstjernen roterer). Disse objekter kaldes derfor for radiopulsarer. De dannes i supernovaeksplosioner og kan også observeres ved andre bølgelængder i det elektromagnetiske spektrum.



Vi beskriver rotationsudviklingen af pulsarer ud fra decelerationsloven:

$$\dot{\Omega} = -K \cdot \Omega^n \quad [1]$$

hvor $\Omega = 2\pi/P$ er pulsarens vinkelfrekvens, og P er rotationsperioden, K er en konstant, og n beskriver det såkaldte braking index, der her antages at være konstant. Symbolet $\dot{\Omega}$ beskriver den første tidsafledede af Ω ($\partial\Omega/\partial t$).

Som en konsekvens af at magnetfeltaksen ikke er parallel med rotationsaksen udsendes elektromagnetisk dipolstråling, der tapper rotationsenergien fra pulsaren ($E_{rot} = \frac{1}{2} I \Omega^2$) med en rate på:

$$\dot{E}_{dipol} = -\frac{2}{3c^3} |\ddot{m}|^2 \quad [2]$$

hvor m er det magnetiske moment: $m = BR^3$, og

$$|\ddot{m}| = BR^3 \Omega^2 \sin \alpha \quad [3]$$

er den anden tidsafledede af m ($\ddot{m} \equiv \partial^2 m / dt^2$). Her betegner B pulsarens magnetfelt, R er pulsarens radius, og I er dens inertimoment.

Som oftest i astrofysik, regnes også her i cgs-enheder i stedet for SI-enheder. Vi antager at $R = 12 \text{ km} = 10^6 \text{ cm}$ og $I = 10^{45} \text{ g cm}^2$. I cgs-enheder måles magnet-feltstyrken (den magnetiske energitæthed), B i enheden Gauss (G), hvor $1 G = 10^4 \text{ Tesla}$. Kort efter pulsaren dannes i en supernovaeksplosion har den typisk $B \approx 10^{13} G$. I denne opgave skal det beregnes hvordan rotationsperioden udvikler sig som funktion af tiden, når magnetfeltet aftager eksponentielt:

$$B(t) = B_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad [4]$$

hvor τ er henfaldskonstanten for B-feltet (typisk gælder $\tau \approx 10 \text{ Myr}$ ($1 \text{ Myr} \equiv 10^6 \text{ yr}$)). Ved at benytte $\dot{E}_{dipol} = \dot{E}_{rot} = I \Omega \dot{\Omega}$ kan man vise:

$$B = \sqrt{\frac{3c^3 I}{8\pi^2 R^6}} P \dot{P} = k \sqrt{P \dot{P}} \approx 3.2 \times 10^{19} \sqrt{P \dot{P}} \text{ G} \quad [5]$$

hvor det gælder at både B , P og $\dot{P}$ er funktioner af tiden ($B(t)$, $P(t)$ og $\dot{P}(t)$).

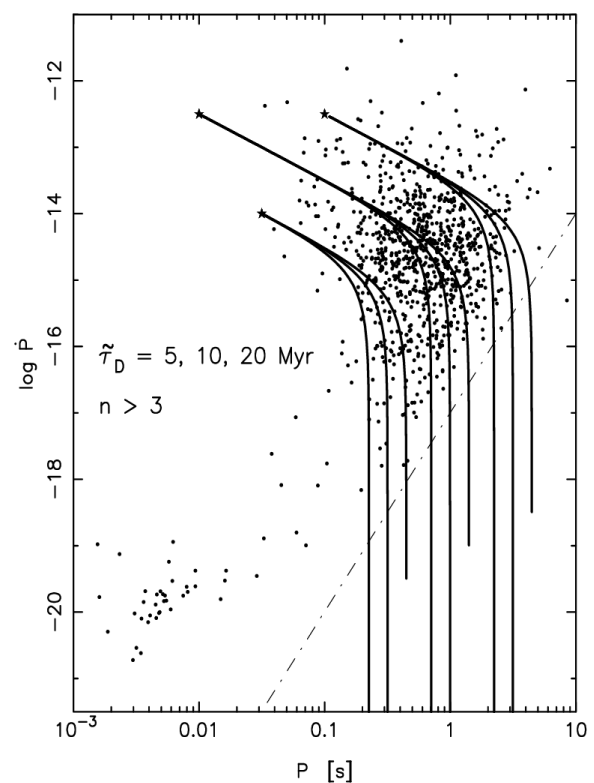
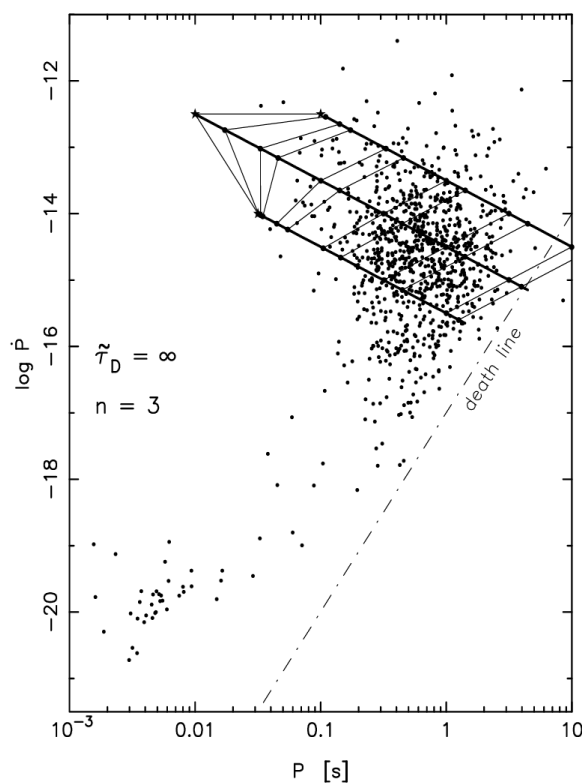
Numeriske beregninger

Til de numeriske beregninger og plot (se figuren) kan følgende fremgangsmetode benyttes:

- 1) Vælg begyndelsesværdierne B_0 og P_0 for pulsaren til tiden $t = 0$,
(fx $B_0 = 10^{13} G$ og $P_0 = 0.010 \text{ s}$), og vælg et tidsstep (fx $\Delta t_0 = 10 \text{ yr}$).
 - 2) Sæt tælleren $N = 1$ (N vokser med tiden og angiver antallet af beregnede datapunkter) der skal plottes på grafen.
 - 3) Beregn $\dot{P}_0$ ud fra ligning [5].
 - 4) Gem datapunktet ($N = 1, t = 0, P_0, \dot{P}_0$) til grafen senere, eller plot direkte punktet ($P_0, \dot{P}_0$) i koordinatsystemet ($\log P(t)$, $\log \dot{P}(t)$), se figuren på næste side.
-
- 5) Sæt tælleren $N = 2$
 - 6) Lad tiden vokse med $\Delta t = \Delta t_0$ således at $t = 0 + \Delta t = \Delta t$
 - 7) Beregn $P(t) = P_0 + \dot{P}_0 \cdot \Delta t$

- 8) Benyt samme værdi af $B = B_0$ hvis udviklingen beregnes for konstant B-felt, eller beregn $B(t)$ fra ligning [4], hvis B-feltet antages at henfalde.
 - 9) Beregn $\dot{P}(t)$ ud fra ligning [5].
 - 10) Gem datapunktet $(N, t, P(t), \dot{P}(t))$ til grafen senere, eller plot $(P(t), \dot{P}(t))$
 -
 - 11) Sæt tælleren $N = 3$
 - 12) Lad tiden vokse med $\Delta t_N = f \cdot \Delta t_{N-1}$ hvor f er en faktor ≥ 1 , fx $f = 1.1$.
Tiden er nu givet ved: $t_N = t_{N-1} + \Delta t_N$
 - 13) Beregn $P(t)_N = P(t)_{N-1} + \dot{P}_{N-1} \cdot \Delta t_N$
 - 14) Benyt samme værdi af $B = B_0$ hvis udviklingen beregnes for konstant B-felt, eller beregn $B(t)$ fra ligning [4], hvis B-feltet antages at henfalde.
 - 15) Beregn $\dot{P}(t)_N$ ud fra ligning [5].
 - 16) Gem datapunktet $(N, t, P(t), \dot{P}(t))$ til grafen senere, eller plot $(P(t), \dot{P}(t))$
- Gentag step 11–16 et stort antal gange, fx indtil enten $P(t) > 20$ s eller $\dot{P}(t) < 10^{-22}$

Eksempler på beregninger af udviklingsspor for pulsarer med forskellige startpunkter. Til venstre ses udviklingsspor med konstant B-felt. Til højre ses udviklingsspor med tre forskellige henfaldstider (5, 10 og 20 Myr) for B-feltet for hvert af de tre forskellige startpunkter. De tynde linjer til venstre angiver isokroner og kan negligeres her i opgaven. Punkterne er målte data for radiopulsarer.



Videre undersøgelser og sammenligning med observationsdata

- Plot forskellige udviklingsspor og undersøg hvilke der stemmer bedst med observationer af radiopulsarer med data fra [ATNF Pulsar Catalogue](#).

Man kan indsætte ligning [4] i ligning [5] og integrere og vise at der gælder:

$$P(t)^2 = P_0^2 + B_0^2 \cdot \tau \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \cdot \frac{1}{k^2} \quad [6]$$

- Vis dette og efterprøv ligning [6] ved at sammenligne med dine numeriske beregninger.
- Bemærk: jo mindre tidsskridt Δt , jo mere nøjagtige (og langsommere) numeriske beregninger, og jo mere data opsamles på computeren til graferne. Prøv at optimere Δt (faktoren f) så der hverken beregnes for få eller alt for mange data.

Litteratur:

- Kapitel 14.1 ("Introduction to Radio Pulsars") i bogen *Physics of Binary Star Evolution*, Tauris & van den Heuvel (2023), Princeton University Press
- Wikipedia om radiopulsarer: <https://en.wikipedia.org/wiki/Pulsar>

God fornøjelse!